Benessere, equilibrio e sviluppo

Studi in onore
di
SIRO LOMBARDINI

Volume terzo

ESTRATTO

VITA E PENSIERO

CARLO FELICE MANARA

Costruzione di matrici quadrate soddisfacenti a particolari condizioni*

A Siro Lombardini, amico carissimo
e maestro di scienza economica.

Avvertenza

Nel seguito indicheremo di regola con lettere maiuscole dell'alfabeto latino delle matrici quadrate ad elementi reali. I vettori saranno indicati con lettere maiuscole, pure dell'alfabeto latino, eventualmente distinte tra loro con indici numerici apposti in alto a destra.

Le componenti dei vettori saranno supposte reali; i vettori ad n componenti saranno immaginati come matrici $(1,n)$ cioè come vettori-riga. Lo spazio dei vettori-riga sarà indicato con U. Considerato un vettore x, indicheremo con il simbolo x_T (apponendo cioè in basso a destra del simbolo x il simbolo «T» di trasposizione delle matrici) il vettore-colonna [matrice $(n,1)$], che ha componenti uguali a quelle del vettore x. Lo spazio dei vettori colonna sarà indicato con V.

Oss. 1 - I vettori V possono essere immaginati come vettori delle quantità di beni (in Economia). I vettori U possono essere immaginati come forme lineari (a valori reali) su V, oppure come vettori di prezzi (in Economia).

§ 1 - Siano dati due vettori:

[1] $$p \,\varepsilon\, U \quad ; \quad q_T \,\varepsilon\, V$$

---

* Alcuni tra i risultati qui esposti sono stati presentati preventivamente nell'articolo dal titolo *Osservazioni sulla costruzione di matrici quadrate soddisfacenti a particolari condizioni,* «Economia Politica», 11 (dicembre 1994), 3, pp. 439-448.

poniamo:

[2] $$\sigma = p \cdot q_T\,;$$

e supponiamo che valga l'ipotesi:

[3] $$\sigma \neq 0.$$

Sia $H\,(p,\,q)$ la matrice:

[4] $$H\,(p, q) = q_T \cdot p\,.$$

Oss. 2 - La matrice H ha rango 1, e può essere considerata come un operatore a destra sui vettori di U e come un operatore a sinistra sui vettori di V.

Tale operatore è ovviamente degenere: si ha infatti

[5] $$\begin{Bmatrix} x_T\,\varepsilon\,V \rightarrow H \cdot x_T = q_T \cdot (p \cdot x_T) \\ y\,\varepsilon\,U \rightarrow y \cdot H = p \cdot (y \cdot q_T) \end{Bmatrix}.$$

Nella ipotesi (3), poniamo:

[6] $$K\,(p, q) = (1/\sigma) \cdot H\,(p, q).$$

Oss. 3 - Si ha:

$$K^2 = K,$$

ossia l'operatore K è idempotente. Inoltre, indicato con α un numero reale qualunque, si ha:

[8] $$\alpha \cdot p \cdot K = \alpha \cdot p \quad ; \quad \alpha \cdot K \cdot q_T = \alpha \cdot q_T.$$

Poniamo ora:

[9] $$S = I + K\,(p,\,q).$$

Oss. 4 - L'operatore S non è degenere; se considerato come operatore su U, esso ha p come autovettore, e, se considerato come operatore su V, esso ha q_T come autovetture.

Si ha infatti:

[10] $$p \cdot S = 2 \cdot p \quad ; \quad S \cdot q_T = 2 \cdot q_T.$$

Inoltre esistono due iperpiani di vettori uniti per S, uno in U ed uno in V. Si ha infatti:

[11] $$\begin{Bmatrix} se \ \ y \, \varepsilon \, U \ \ ed \ \ y \cdot q_T = 0, \ \ allora \ \ y \cdot S = y; \\ se \ \ x_T \, \varepsilon \, V \ \ e \ \ p \cdot x_T = 0, \ \ allora \ \ S \cdot x_T = x_T \end{Bmatrix}.$$

Ponendo ora:

[12] $$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

con

[13] $$\alpha_{1,} \, \alpha_2 \neq 0$$

si verifica che la matrice:

[14] $$S = \alpha_1 \cdot I + \alpha_2 \cdot K\,(p, q)$$

ha α come autovalore, ed ammette i vettori p e q_T rispettivamente come autovettori sinistro e destro, corrispondenti all'autovalore α.

§ 2 - Sia ora M una matrice quadrata, non degenere, sia α un suo autovalore, e siano p e q_T gli autovettori (rispettivamente sinistro e destro) che gli corrispondono. Si abbia cioè

[1] $$p \cdot M = \alpha \cdot p \quad , \quad M \cdot q_T = \alpha \cdot q_T ,$$

e supponiamo che sia valida l'ipotesi (2) del § 1, cioè che si abbia:

$$\sigma = p \cdot q_T \neq 0 . \tag{2}$$

Indichiamo ancora con S la matrice data dalle (14) del N. 1, e sia C la matrice:

$$C = M - S. \tag{3}$$

Dalle definizioni date si trae che valgono le:

$$p \cdot C = 0 \quad ; \quad C \cdot q_T = 0 . \tag{4}$$

Dalla ipotesi (2) si trae che nessuno dei due vettori p e q_T può essere nullo; si conclude quindi che la matrice C, in conseguenza della (4), ha rango minore di n.

La costruzione di una matrice C, di rango minore di n, che soddisfi alle (4) si può conseguire con la procedura seguente:

Indichiamo con Q una matrice $(n, n\text{-}1)$ le cui colonne sono costituite da $(n\text{-}1)$ vettori-colonna, linearmente indipendenti, che formano una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione:

$$p \cdot x_T = 0 . \tag{5}$$

Analogamente, sia P una matrice $(n\text{-}1, n)$ le cui righe sono costituite da $(n\text{-}1)$ vettori-riga, linearmente indipendenti, che formano una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione:

$$y \cdot q_T = 0 . \tag{6}$$

Da quanto precede si ha che le due matrici P e Q hanno rango $(n\text{-}1)$.

Sia poi B una matrice quadrata $(n\text{-}1, n\text{-}1)$ e si costruisca la matrice:

$$C = Q \cdot B \cdot P. \tag{7}$$

Dalla definizione delle matrici Q e P si deduce che valgono le relazioni (4). Si ha inoltre:

[8] $$K(p \cdot q) \cdot C = C \cdot K(p, q) = 0.$$

Con scelta opportuna delle matrici B, P, Q, le matrici S e C permettono una decomposizione della matrice data M nella forma:

[9] $$M = S + C$$

sulla quale ritorneremo nel seguito.

§ 3 - La formula (9) del § precedente può essere utilizzata per dare soluzioni a certi problemi che interessano l'Economia: precisamente la formula stessa permette di costruire matrici quadrate strettamente positive, che soddisfano a determinate condizioni.

Ricordiamo che noti teoremi di Perron e Frobenius assicurano che una matrice quadrata M, strettamente positiva, non degenere e non decomponibile, possiede un autovalore α positivo, e due autovettori $p \;\varepsilon\; Q$ e $q_T \;\varepsilon\; V$, strettamente positivi, che corrispondono all'autovalore α; questo risulta essere una radice semplice dell'equazione caratteristica della matrice M.

Valgono quindi le (1) del § precedente, ed inoltre si ha:

[1] $$p > 0 \quad ; \quad q_T > 0$$

e quindi anche:

[2] $$p \cdot q_T = \sigma > 0\ .$$

Poniamo:

[3] $$p = [p_1, p_2, ..., p_n] \quad ; \quad q = [q_1, q_2, ..., q_n].$$

Ora, nella (12) del § 1, scegliamo

[4] $$\alpha > 0$$

ed α_1 in modo che siano soddisfatte le condizioni

[5] $$(p \cdot q_T) \cdot \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (p_i \cdot q_i) > 0 \qquad (1 \leq i \leq n);$$

con queste scelte, la matrice S data dalla (14) del § 1 è strettamente positiva. Inoltre, per le (5) del § 2 la matrice:

[6] $$M = S + C$$

ammette p e q_T come autovettori, rispettivamente sinistro e destro, corrispondenti all'autovalore α.

Oss. 5 - La (6) esibisce la matrice M come funzione continua degli elementi della matrice C, ed in particolare, fissate P e Q, degli elementi della matrice B: quando è $B = 0$ si ha di conseguenza $C = 0$ e quindi la matrice M si riduce alla S, ed è strettamente positiva. In conseguenza della continuità, si avranno quindi dei valori degli elementi di B in corrispondenza ai quali la matrice M è ancora strettamente positiva.

§ 4 - Una classe particolare di matrici C, che entrano nella (6) del § 3 può essere costruita con la procedura seguente: siano E ed F due matrici (n,n) emisimmetriche; si abbia cioè:

[1] $$E + E_T = 0 \quad ; \quad F + F_T = 0;$$

segue di qui che valgono le relazioni:

[2] $$p \cdot E \cdot p_T = 0 \quad ; \quad q \cdot F \cdot q_T = 0 .$$

Indichiamo con D la matrice:

[3] $$D = E \cdot p_T \,.\, q \cdot F$$

Oss. 6 - Dalle (2) si trae:

[4] $$p \cdot D = 0 \quad ; \quad D \cdot q_T = 0 \, .$$

Quindi la matrice D ha proprietà analoghe a quella della matrice C, data dalla (7) del § 2; tuttavia la D, ora costruita, ha rango 1, mentre la C può avere rango $(n\text{-}1)$.

Sia ora M una matrice quadrata strettamente positiva, e siano p e q_T i suoi autovettori di Frobenius, corrispondenti all'autovalore α. Poniamo:

[5] $$\overline{M} = M + D \, ;$$

dalle formule ora scritte si trae che $\overline{M}$ ha autovalore ed autovettori di Frobenius uguali a quelli di M. Inoltre la (5) esibisce $\overline{M}$ come funzione continua degli elementi delle matrici E ed F; infine $\overline{M}$ coincide con M quando si abbia E = 0 oppure F = 0.

È quindi possibile modificare la matrice M, agendo sugli elementi della matrice D, mantenendo costanti gli elementi di Frobenius della matrice quadrata.

§ 5 - Ciò che si è detto nel § precedente può essere sviluppato con i calcoli che seguono.

Indichiamo con N l'insieme dei primi n numeri naturali; poniamo cioè:

[1] $$N = \{1,2,3,...n\}.$$

Poniamo:

[2] $$E = [e_{ir}]; \qquad F = [f_{kj}] \quad ; \quad i,k,j,r \,\varepsilon\, N.$$

Le (3) del § precedente si traducono nelle:

[3] $$e_{ir} + e_{ri} = 0; f_{kj} + f_{jk} = 0.$$

Poniamo:

[4]
$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_T = E \cdot p_T & ; & \bar{p}_i = \sum_r e_{it} \cdot p_t \\ \bar{q} = \bar{q} \cdot F & ; & \bar{q}_j = \sum_k f_{kj} \cdot q_k \end{Bmatrix} .$$

Poniamo anche:

[5]
$$D = [d_{ij}] = [\bar{p}_i \cdot \bar{q}_j]$$
$$d_{ij} = \sum_{r,k} e_{jr} \cdot f_{jk} \cdot p_r \cdot q_k \, .$$

Oss. 7 - Sia P un sottoinsieme proprio di N e sia h la cardinalità (numero degli elementi) di P:

[6]
$$| \, P \, | = h < n \, .$$

Scegliendo gli elementi della matrice E in modo che siano soddisfatte le h equazioni:

[6]
$$\bar{p}_i = 0 \quad , \quad i \, \varepsilon \, P$$

saranno nulle tutte le componenti delle righe di D che corrispondono agli indici $i \, \varepsilon \, P$; e quindi le corrispondenti righe $\overline{M}$ coincideranno con quelle di M.

Analogamente, indichiamo qui con Q un sottoinsieme proprio di N, e sia k la cardinalità (numero degli elementi) di Q:

[7]
$$| \, Q \, | = k < n \, ;$$

scegliendo gli elementi della matrice F in modo che siano soddisfatte le k equazioni:

[8]
$$\bar{q}_j = 0 \quad , \quad j \, \varepsilon \, Q$$

saranno nulle le componenti delle colonne di D che corrispondono agli indici $j \varepsilon Q$ e quindi le corrispondenti componenti $\overline{M}$ coincideranno con quelle di M.

§ 6 - La formula (9) del § 3:

[9] § 3 $$M = S + C$$

fornisce una vasta classe di matrici ad elementi positivi che hanno tutte gli stessi elementi di Frobenius (autovalore massimo e corrispondenti autovettori).

Si può prendere in considerazione il problema di costruire delle matrici come la C della formula richiamata, che sono caratterizzate dal fatto di soddisfare alle condizioni (4) del § 2, che qui ripetiamo per comodità del lettore:

[4] § 2 $$p \cdot C = 0 \quad ; \quad C \cdot q_T = 0.$$

Nel § 4 abbiamo dato di questo problema una soluzione di applicazione abbastanza facile, ma particolare: abbiamo infatti avvertito che la matrice che si ottiene con la formula (3) del § 4 ha rango 1, mentre la più generale matrice C che soddisfa alle condizioni scritte sopra può avere rango (n-1).

Per gli scopi che ci interessano qui, riprenderemo in considerazione le matrici Q e P, già introdotte nel § 2. Precisamente indicheremo con Q la matrice (n, n-1) le cui colonne sono vettori, linearmente indipendenti, che costituiscono una base per le soluzioni dell'equazione:

[5] § 2 $$p \cdot x_T = 0;$$

ed analogamente indicheremo con Q la matrice (n-1, n) le cui righe sono vettori, linearmente indipendenti, che formano una base per le soluzioni dell'equazione:

[6] § 2 $$y \cdot q = 0.$$

La costruzione delle matrici P e Q che soddisfano alle condizioni (5), (6) § 2 può essere ottenuta con la seguente procedura:

ricordando le (1) § 2, indichiamo qui con il simbolo p^* il vettore ad (n-1) componenti dato da:

$$[1] \qquad p^* = [p_1, p_2, \dots p_{n-1}];$$

ed analogamente indichiamo con q* il vettore ad (n-1) componenti dato da:

$$[2] \qquad q^* = [q_1, q_2, \dots q_{n-1}].$$

Indichiamo poi con I la matrice identica di ordine (n-1). Con queste notazioni poniamo ora:

$$[3] \qquad Q = \left| \frac{-p_n \cdot I}{p^*} \right| \quad ; \quad P = [-q_n \cdot I \mid q^*_T] .$$

Indichiamo poi con B una matrice quadrata non degenere di ordine (n-1). Si verifica che la matrice quadrata di ordine n data da:

$$[4] \qquad C = Q \cdot B \cdot P$$

ha rango (n-1) e soddisfa alle condizioni (4) § 2.

Eseguendo i calcoli, si ottiene la espressione della matrice C sotto la forma:

$$[5] \qquad C = \left| \begin{array}{c|c} p_n \cdot q_n \cdot B & -p_n \cdot [B \cdot q^*_T] \\ \hline -q_n \cdot [p^* \cdot B] & p^* \cdot B \cdot q^*_T \end{array} \right| .$$

Questa formula esibisce gli elementi della matrice C come funzioni lineari, e quindi ovviamente continue, degli elementi della matrice B; funzioni che si annullano per $B = 0$. Pertanto possiamo ripetere qui ciò che è stato affermato nella Oss. 4 del § 3: esisterà un insieme di valori degli elementi di B in corrispondenza ai quali gli elementi della matrice M data dalla (9) § 3 sono tutti positivi; inoltre tutte queste matrici hanno gli stessi elementi di Frobenius (autovalore massimo e corrispondenti autovettori).

Si osserva infine che, essendo gli elementi di C, forniti dalla espressione (5), delle funzioni lineari degli elementi della matrice B, è possibile pensare ad opportune procedure di scelta di questi ultimi che scaturiscano da problemi di ottimizzazione.

§ 7 - La decomposizione di una matrice M, data dalla (6) del § 3, può essere estesa ulteriormente qualora la matrice stessa soddisfi a determinate ipotesi. Precisamente, si supponga che la matrice M abbia n autovalori reali:

[1] $$\alpha_i \quad , \quad i \,\varepsilon\, N$$

e che tali autovalori siano tutti non nulli e diversi tra loro; si abbia cioè:

[2] $$\alpha_i \neq 0 \quad ; \quad i \neq j \rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j \quad , \quad i, j \,\varepsilon\, N \, .$$

A questi autovalori corrispondono certi $2n$ autovettori; si abbia cioè:

[3] $$p^i \cdot M = \alpha_i \cdot p^i \quad ; \quad M \cdot q^j_T = \alpha_j \cdot q^j_T \quad ; \quad j, i \,\varepsilon\, N$$

e supponiamo anche si abbia:

[4] $$\sigma = p^i \cdot q^i_T \neq 0 \quad i \,\varepsilon\, N \, .$$

È noto che si ha:

[5] $$i \neq j \rightarrow p^i \cdot q^j_T = 0 \quad ; \quad i, j \,\varepsilon\, N \, .$$

Si costruiscono ora gli n operatori:

[6] $$K_i = K\,(p^i, q^i) \, .$$

A seguito delle ipotesi e delle definizioni date si ha:

[7] $$K_i^2 = K_i \quad ; \quad i \neq j \quad K_i \cdot K_j = 0 \quad ; \quad i, j \,\varepsilon\, N\,.$$

Quindi si ha che l'operatore M ammette in questo caso la decomposizione canonica:

[8] $$M = \sum_i \alpha_i \cdot K_i \qquad i \,\varepsilon\, N\,.$$

In particolare, a seguito delle (7) si ha, per ogni numero naturale m:

[9] $$M^m = \sum_i (\alpha_i)^m \cdot K_i\,.$$

In particolare, per $m = 0$, la formula (9) conduce alla relazione fondamentale:

[10] $$I = \sum_i K_i\,.$$

§ 8 - Gli sviluppi dei paragrafi precedenti (in particolare del § 7 che precede immediatamente questo) sono stati svolti nella ipotesi che gli autovalori della matrice M considerata siano tutti reali.

È possibile tuttavia trattare anche il caso in cui la matrice in parola abbia coppie di autovalori complessi coniugati.

Supponiamo che un autovalore della matrice M sia un numero complesso:

[1] $$\gamma = \alpha_0 + i \cdot \beta_0 \quad ; \quad \alpha_0, \beta_0 \,\varepsilon\, \Re \quad ; \quad i^2 + 1 = 0 \quad ; \quad \beta_0 \neq 0\,.$$

È noto che γ può essere rappresentato in forma trigonometrica nella forma:

[2] $$\gamma = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta) \quad ; \quad \rho^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 \quad ; \quad \tan\theta = \beta_0 / \alpha_0\,.$$

Supponiamo che all'autovalore γ corrispondano i due vettori complessi: z_0 e w_0, dati da:

[3] $$\begin{cases} z_{0T} = x_{0T} + i \cdot y_{0T} & ; \quad x_{0T}, y_{0T} \,\varepsilon V \\ w_0 = u_0 + i \cdot v_0 & ; \quad u_0, v_0 \,\varepsilon U. \end{cases}$$

Indichiamo, secondo il solito, con il simbolo $\overline{\gamma}$ il numero complesso:

$$\overline{\gamma} = \alpha_0 - i \cdot \beta_0 \,,$$

coniugato di γ, ed indichiamo con $\overline{z}_{0T}$,$\overline{w}_0$ i vettori (coniugati di z_0 e w_0) che si ottengono mutando il segno della unità immaginaria i nelle formule (3).

Nelle ipotesi poste si avranno le relazioni:

[4] $$\begin{cases} w_0 \cdot M = y_0 \cdot w_0 \\ M z_{0T} = \gamma \cdot z_{0T} \,. \end{cases}$$

e dalla seconda delle (4) si trae:

[5] $$M \cdot \overline{z}_{0T} = \overline{\gamma} \cdot \overline{x}_{0T} \,.$$

Con facili e note procedure, dalle (4) e (5) si trae:

[6] $$(y_0 - \overline{y}_0) \cdot w_0 \,.\, z_{0T} = 0,$$

e di qui, e dalla (1) si giunge alla:

[7] $$w_0 \cdot \overline{z}_{0T} = 0.$$

Per separazione del reale dell'immaginario, le equazioni (4) danno luogo alle coppie di equazioni:

[8] $$\begin{cases} u_0 \cdot M = \alpha_0 \cdot u_0 - \beta_0 \cdot v_0 \\ v_0 \cdot M = \alpha_0 \cdot v_0 + \beta \cdot u_0. \end{cases}$$

[9] $$\begin{cases} M \cdot x_{0T} = \alpha_0\, x_{0T} - \beta_0 \cdot y_{0T} \\ M \cdot y_{0T} = \alpha_0 \cdot y_{0T} + \beta_0 \cdot x_{0T}. \end{cases}$$

E la (7) dà luogo alla coppia di equazioni:

[10] $$\begin{cases} u_0 \cdot x_{0T} + v_0 \cdot v_{0T} = 0 \\ u_0 \cdot y_{0T} - v_0 \cdot x_{0T} = 0. \end{cases}$$

§ 9 - Le relazioni ottenute nel § precedente permettono ora di dare una soluzione più generale del problema trattato nel § 7, di rappresentare una matrice M della quale siano stati assegnati gli autovalori ed i corrispondenti autovettori.

Tratteremo qui di seguito il caso in cui l'equazione caratteristica della matrice in parola abbia soltanto due radici complesse coniugate, e quindi due coppie di autovettori corrispondenti. Questo caso è ovviamente particolare, ma chiaramente paradigmatico; pertanto non esistono difficoltà nella sua generalizzazione, che non diamo qui per non complicare inutilmente l'esposizione.

Sia dunque una matrice M, quadrata, di ordine n, ad elementi reali; siano γ e $\bar{\gamma}$ due suoi autovalori, complessi coniugati, con:

[1] $$\gamma = \alpha_0 + i \cdot \beta_0 \quad ; \quad \alpha_0, \beta_0\, \varepsilon \Re \quad ; \quad \beta_0 \neq 0;$$

e poniamo anche:

[2] $$\gamma = \rho\,(\cos\theta + i \cdot \sin\theta) \quad ; \quad \rho^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 \quad ; \quad \tan\theta \neq \beta_0/\alpha_0\,.$$

Siano z_0 e $\overline{z}_0$, w_0, $\overline{w}_0$ gli autovettori, rispettivamente destri e sinistri, complessi coniugati che corrispondono agli autovalori γ e $\overline{\gamma}$; saranno quindi valide le formule (3), (4), (5), (7), (10) del § precedente. Siano poi

[3] $$\alpha_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n-2$$

gli altri autovalori (reali) della matrice M, e supponiamo che essi siano tutti diversi tra loro; si abbia cioè:

[4] $$i \neq k \rightarrow \alpha_0 \neq \alpha_k \, ; \qquad 1 \leq i, k \leq \; n-2.$$

Siano poi:

[5] $$p^i \, , q_T^i \qquad 1 \leq i \leq n-2$$

gli altri autovettori (reali, rispettivamente sinistri e destri) della matrice M, corrispondenti rispettivamente agli autovalori (3).

È noto che si ha:

[6] $$i \neq k \quad \rightarrow \quad p^i \cdot q_T^k = 0 \quad , \quad 1 \leq i, k \leq n-2.$$

In modo formalmente analogo si dimostra poi che si ha:

[7] $$\begin{cases} p^i \cdot x_{OT} = p^i \cdot y_{OT} = 0 & ; \quad 1 \leq i \leq n-2 \\ u_0 \cdot q_T^k = v_0 \cdot q_T^k = 0. & ; \quad 1 \leq k \leq n-2. \end{cases}$$

Si ponga ora:

[8] $$\begin{cases} A = -x_0 \, u_{0T} = -u_0 \, x_{OT} = v_0 \, v_{OT} = y_0 \, v_{0T} \\ B = x_0 \, v_{0T} = \quad v_0 \, x_{0T} = y_0 \, u_{0T} = u_0 \, y_{0T}. \end{cases}$$

ed anche:

[9] $$\begin{cases} \lambda = -A \cdot \alpha_0 + B \cdot B_0 \\ \mu = B \cdot \alpha_0 + A \cdot \beta_0 \, . \end{cases}$$

Nelle ipotesi poste, si verifica che la matrice M può essere espressa nella forma:

$$[10] \quad M = \lambda \cdot [H(u_0, x_0) - H(v_0, y_0)] + \mu \, . \, [H(v_0, x_0) + H(u_0, y_0)] +$$

$$+ \sum_i \alpha_i \cdot K_i (p^i, q^i) \quad ; \quad (1 \leq i \leq n-2).$$

Oss. 8 - Anche a partire della formula (10) si può dare risposta al problema di costruire matrici M quadrate, strettamente positive, soddisfacenti a certe condizioni che presentano qualche interesse per le possibili applicazioni alla teoria economica. In particolare è possibile risolvere il problema di costruire ampie classi di matrici quadrate strettamente positive, aventi tutte i medesimi elementi di Frobenius: autovalore massimo e corrispondenti autovettori.

Sia infatti α (> 0) l'autovalore massimo, e siano p e q_T, i due corrispondenti autovettori (sinistro e destro). Siano poi:

$$[11] \qquad \rho \ e \ \rho_i \quad (2 \leq i \leq n-2)$$

certe costanti, che ci riserviamo di determinare. La matrice:

$$[12] \qquad M = \alpha \cdot K(p, q) +$$

$$+ \rho \cdot \lambda \cdot [H(u, x) - H(v, y)] + \mu \, [H(v, x) + H(u, y)] +$$

$$\sum_i \rho_i \cdot \alpha_i \, K_i \cdot (p^i, q^i). \qquad (2 \leq i \leq n-2)$$

nella quale i vettori u, v, x, y, p^i, q^i soddisfano alle condizioni: (4). (5), (10) del § precedente e (7) del presente §, ha come autovalore α e come autovettori corrispondenti p e q_T.

Inoltre il primo addendo nel secondo membro della (12) rappresenta una matrice strettamente positiva, e la formula esibisce la matrice M come una funzione lineare (e quindi continua) dei parametri reali ρ e ρ_i . È quindi possibile scegliere i valori di questi parametri in modo tale che la intera matrice M sia strettamente positiva, ed in modo che α, p e q_T siano i corrispondenti elementi di Frobenius.

ISBN 88-343-3640-2

Finito di stampare nel maggio 1996 dalla Lit. Solari - P. Borromeo (Mi)